Approssimazione

Corso di Calcolo Numerico, a.a. 2008/2009

Francesca Mazzia

Dipartimento di Matematica
Università di Bari

17 Maggio 2009

Approssimazione ai minimi quadrati

Finora abbiamo affrontato il problema di costruire un polinomio che passa per punti prefissati. Se i valori assegnati sono affetti da errori, come in genere capita se tali valori sono ottenuti da osservazioni sperimentali, allora non ha più molto senso "costringere" il polinomio ad assumere tali valori. In questo caso è più significativo richiedere che $p(x)$ sia "vicino" ai valori f_i senza che $p(x_i) = f_i$ nei punti x_i.
Sia $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ una base di P_n e siano (x_i, f_i), per $i = 0, \ldots, m$, $m + 1 > n$ coppie di punti assegnati. Cercheremo il polinomio $p(x)$ tale che la quantità

$$F = \sum_{i=0}^{m} (p(x_i) - f_i)^2$$

risulti minima. Il polinomio $p(x)$ così ottenuto approssima i dati nel senso dei *minimi quadrati*.

Posto

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x),$$

si ha

$$F(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x_i) - f_i \right)^2 .$$

Per ricavare i coefficienti che minimizzano la precedente funzione bisogna annullare le derivate parziali. Si pone:

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x_i) - f_i \right) \phi_k(x_i) = 0,$$

da cui si ottiene un sistema lineare nelle incognite a_j :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=0}^{m} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{m} f_i \phi_k(x_i), \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Poniamo

$$(\phi_j, \phi_k) = \sum_{i=0}^{m} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i),$$

$$(f, \phi_k) = \sum_{i=0}^{m} f_i\phi_k(x_i).$$

Il sistema precedente diventa:

$$\sum_{j=0}^{n}(\phi_j, \phi_k)a_j = (f, \phi_k) \qquad \text{per } k = 0, 1, \dots, n.$$

La matrice dei coefficienti è:

$$G = \begin{pmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_1, \phi_0) & \dots & (\phi_n, \phi_0) \\ (\phi_1, \phi_0) & (\phi_1, \phi_1) & \dots & (\phi_n, \phi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n, \phi_0) & (\phi_n, \phi_1) & \dots & (\phi_n, \phi_n) \end{pmatrix}.$$

G è simmetrica, è anche definita positiva. Considerato che G coincide con l'Hessiano di F, ciò dimostra che la F ha realmente un punto di minimo.

Prendiamo $n = 0$ e $\phi_0(x) = 1$. Vogliamo quindi trovare una costante che approssimi i dati $f_0, f_1, \ldots, f_m$. Si ha:

$$(\phi_0, \phi_0) = m + 1, \quad \text{e} \quad (f, \phi_0) = \sum_{i=0}^{m} f_i.$$

Il sistema si riduce all'unica equazione:

$$(m + 1)\ a = \sum_{i=0}^{m} f_i$$

da cui si ricava:

$$a = \frac{1}{m + 1} \sum_{i=0}^{m} f_i,$$

cioè la media aritmetica dei valori f_i.

Consideriamo il caso $n = 1$ allora $p(x) = a_0 + a_1 x$. Desideriamo calcolare il polinomio di primo grado che approssima i dati $f_0, f_1, \dots, f_m$ nel senso dei minimi quadrati cioè:

$$\min_{a_0,a_1} \sum_{i=0}^{m} (f_i - p(x_i))^2 = \min_{a_0,a_1} \sum_{i=0}^{m} (f_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

Sia $F(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{m} (f_i - a_0 - a_1 x_i)^2$ calcoliamo le derivate e poniamole uguali a zero:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=0}^{m} (f_i - (a_0 + a_1 x_i)) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=0}^{m} (f_i - (a_0 + a_1 x_i) x_i) = 0$$

otteniamo:

$$\sum_{i=0}^{m}(f_i - (a_0 + a_1 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{m}(f_i - (a_0 + a_1 x_i)x_i = 0$$

cioè

$$\begin{array}{lll} (m+1)a_0 & +(\sum_{i=0}^{m} x_i)a_1 & = \sum_{i=0}^{m} f_i \\ (\sum_{i=0}^{m} x_i)a_0 & +(\sum_{i=0}^{m} x_i^2)a_1 & = \sum_{i=0}^{m} f_i x_i \end{array}$$

Questo è un sistema lineare di due equazioni in due incognite. La soluzione è:

$$a_0 = \frac{(\sum_{i=0}^{m} x_i^2)(\sum_{i=0}^{m} f_i) - (\sum_{i=0}^{m} x_i)(\sum_{i=0}^{m} f_i x_i)}{n(\sum_{i=0}^{m} x_i^2) - (\sum_{i=0}^{m} x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{(m+1)(\sum_{i=0}^{m} f_i x_i) - (\sum_{i=0}^{m} x_i)(\sum_{i=0}^{m} f_i)}{n(\sum_{i=0}^{m} x_i^2) - (\sum_{i=0}^{m} x_i)^2}$$

Sistemi lineari sovradeterminati

$$Ax = b, \qquad A \in R^{m \times n}, m > n, n = rango(A)$$

Il sistema ammette soluzione solo se

$$b \in \{b \in R^m : \text{esiste } x \in R^n, b = A * x\}.$$

Cerchiamo x in modo tale che la norma 2 al quadrato del residuo

$$\|r\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2$$

sia minimizzata. La x si dice soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati.

Fattorizzazione QR

Data $A \in R^{m\times n}$, $m > n, n = rango(A)$ esistono:

- una matrice $Q \in R^{m\times m}$ ortogonale $(Q^T Q = Q * Q^T = I)$
- una matrice
$$R \equiv \begin{pmatrix} \hat{R} \\ O \end{pmatrix}$$
  $\hat{R} \in R^{n\times n}$ triangolare superiore e non singolare

tali che
$$A = QR \equiv Q \begin{pmatrix} \hat{R} \\ O \end{pmatrix}$$

Proprietà della norma 2

Se Q è una matrice ortogonale ($Q^T Q = Q * Q^T = I$) allora

$$\|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2$$

Soluzione del problema ai minimi quadrati

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|QRx - b\|_2^2 = \|Q(Rx - Q^T b)\|_2^2 =$$

$$= \|Rx - Q^T b\|_2^2 = \|Rx - g\|_2^2.$$

Poniamo

$$g = Q^T b = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix}$$

con $g_1 \in R^n$, si ottiene:

$$\|Rx - g\|_2^2 = \| \begin{pmatrix} \hat{R} \\ O \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} \| =$$

$$\|\hat{R}x - g_1\|_2^2 + \|g_2\|_2^2$$

Il min $\|Ax - b\|_2^2$ si ottiene scegliendo x soluzione del sistema $\hat{R}x = g_1$