

# Interpolazione

Corso di Calcolo Numerico, a.a. 2008/2009

Francesca Mazzia

Dipartimento di Matematica  
Università di Bari

17 Aprile 2009

# Interpolazione

*Problema dell'Interpolazione dati i punti  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$   
trovare una curva continua che passi per essi.*

*Interpolazione polinomiale : dati i punti  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$   
trovare un polinomio di grado  $n$  tale che  $p(x_i) = f_i$ , per  $i = 0, 1, \dots, n$*

# Polinomi

Sia  $P_n$  l'insieme di tutti i polinomi di grado minore od uguale ad  $n$ ,  $n$  un numero positivo.

Questo insieme può essere generato dai polinomi elementari

$1, x, x^2, \dots, x^n$ :

$$p(x) = \sum_{j=0}^n p_j x^j.$$

Al variare dei coefficienti  $p_j$  si ottengono tutti i polinomi dell'insieme.

Le funzioni  $1, x, x^2, \dots, x^n$  sono linearmente indipendenti.

Infatti il polinomio identicamente nullo si può ottenere solo prendendo tutti i coefficienti  $p_j = 0$ .

L'insieme di polinomi elementari  $\{x^i\}_{i=0}^n$ , forma una base di  $P_n$ , detta base delle potenze.

Siano  $(x_i, f_i)$ , per  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  delle coppie di punti nel piano cartesiano.

Supponiamo che i punti  $x_i$ , detti nodi, siano distinti,  $x_i \neq x_j$  per  $i \neq j$ . Vogliamo determinare un polinomio  $p(x) \in P_n$  tale che

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n p_j x_0^j &= f_0 \\ \sum_{j=0}^n p_j x_1^j &= f_1 \\ &\vdots \\ \sum_{j=0}^n p_j x_n^j &= f_n \end{aligned}$$

È questo il problema dell' interpolazione dei dati  $(x_i, f_i)$  mediante un polinomio, detto polinomio interpolante.

Introduciamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix};$$

il problema si pone nella forma:

$$A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

e si riduce a risolvere un sistema lineare di dimensioni  $n + 1$ .

La matrice  $A$ , detta matrice di Vandermonde è non singolare essendo:

$$\det(A) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Quindi il sistema precedente ammette una unica soluzione e ciò permette di ricavare il polinomio interpolante.

La matrice di Vandermonde è spesso mal condizionata e, nel caso in cui i dati da interpolare siano molti, la soluzione del sistema precedente risulta molto costosa.

Il problema dell'interpolazione può essere risolto più efficientemente usando altre basi di  $P_n$ .

Se le quantità  $f_i$  sono i valori assunti da un polinomio  $f \in P_n$  nei punti  $x_i$ , allora il polinomio  $p(x)$  coincide con  $f(x)$ .

$d(x) = f(x) - p(x)$  è un polinomio di  $P_n$  il quale si annulla negli  $n + 1$  punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Ma un polinomio di grado minore o uguale ad  $n$  non può avere più di  $n$  radici a meno che non sia il polinomio nullo in tutti i punti, e quindi

$$d(x) = f(x) - p(x) \equiv 0.$$

Questo dimostra l'unicità del polinomio interpolante.

# Interpolazione di Lagrange

Consideriamo i polinomi, tutti di grado  $n$ :

$$l_j(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)} \quad \text{per } j = 0, 1, \dots, n.$$

Essi godono delle seguenti proprietà:

1) Per  $j, k = 0, 1, \dots, n$  risulta

$$l_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{per } j = k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



# Interpolazione di Lagrange

2) Sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di  $P_n$ . Infatti da

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(x) = 0$$

si ha, per  $k = 0, 1, \dots, n$

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(x_k) = \alpha_k l_k(x_k) = 0$$

da cui si ricava che tutti i coefficienti  $\alpha_k$  devono necessariamente essere nulli.

## Base di Lagrange

L'insieme  $\{l_i(x)\}_{i=0}^n$  è detta base di Lagrange. Imponendo le condizioni di interpolazione si ha

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n p_j l_j(x_0) &= f_0 \\ \sum_{j=0}^n p_j l_j(x_1) &= f_1 \\ \dots \\ \sum_{j=0}^n p_j l_j(x_n) &= f_n\end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti è la matrice identica. Si ha  $p_j = f_j$  e il polinomio interpolante risultante diventa:

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_j(x).$$

Messo nella forma precedente il polinomio interpolante è detto polinomio di Lagrange.

## Esempio 1

Consideriamo  $n = 1$  (interpolazione lineare). In questo caso si ha

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Il polinomio interpolante è una retta passante per i due punti  $x_0$  e  $x_1$ .

## Esempio 2

Consideriamo  $n = 2$  (interpolazione quadratica). In questo caso si ha

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

## Interpolazione di Newton

La formula di interpolazione di Lagrange è molto semplice nella forma, ma costosa se si vogliono aggiungere altri punti.

Le funzioni  $l_i(x)$  dipendono da tutti i punti in cui si fa l'interpolazione. Se si vuol aggiungere un altro punto, tutte le funzioni di base cambiano.

Introduciamo una nuova base detta base di Newton

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= 1, \\ \phi_1(x) &= (x - x_0), \\ &\vdots \\ \phi_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).\end{aligned}$$

Ogni  $p(x) \in P_n$  potrà scriversi nella forma:

$$p(x) = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x).$$

Imponendo le condizioni di interpolazione si ha:

$$\begin{aligned}a_0 &= f_0, \\a_0 + a_1\phi_1(x_1) &= f_1, \\a_0 + a_1\phi_1(x_2) + a_2\phi_2(x_2) &= f_2, \\&\vdots \\a_0 + a_1\phi_1(x_n) + \dots + a_n\phi_n(x_n) &= f_n.\end{aligned}$$

Si ha quindi un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è triangolare inferiore:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \phi_1(x_1) & 0 & & 0 \\ 1 & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix}.$$

I coefficienti del polinomio si ottengono risolvendo il sistema:

$$N \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

La matrice è non singolare e quindi i coefficienti sono unici.

I coefficienti  $a_i$  dipendono dai valori di

$f_0, f_1, \dots, f_{i-1}$  e  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$ .

Indichiamo la dipendenza con

$$a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i].$$

Il polinomio interpolante assume la forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

e viene chiamato polinomio di interpolazione di Newton.

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

vengono chiamate differenze divise.

Il sistema triangolare può essere risolto in  $O(n^2)$  operazione per calcolare i coefficienti dell'interpolante di Newton. Sfortunatamente i coefficienti di questo sistema possono creare facilmente problemi di overflow e di underflow.



Deriviamo un algoritmo diverso, ma molto più stabile, utilizzando le differenze divise.

Dalla prima equazione del sistema si ricava che:

$$a_0 \equiv f[x_0] = f_0,$$

e dalla seconda

$$a_1 \equiv f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Questa espressione è un caso speciale di una relazione più generale:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Per dimostrare questa relazione poniamo:  $p$  il polinomio interpolante

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_k, f_k)$$

$q$  il polinomio interpolante

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_{k-1}, f_{k-1})$$

$r$  il polinomio interpolante

$$(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_k, f_k)$$

I coefficienti del termine di grado massimo per questi polinomi sono:

per  $p$  :  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$

per  $q$  :  $f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]$

per  $r$  :  $f[x_1, x_2, \dots, x_k]$

Ora dimostriamo che

$$p(x) = q(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}(r(x) - q(x))$$

Per mostrare questo calcoliamo

$$q(x) + \frac{x - x_0}{x_i - x_0}(r(x) - q(x))$$

in  $x_i$  e proviamo che  $p(x_i) = f_i$  per  $i = 1, n$ .

Il risultato segue dall'unicità del polinomio interpolante.

Per  $x = x_0$

$$q(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_k - x_0}(r(x_0) - q(x_0)) = f_0$$

poichè  $q$  interpola  $(x_0, f_0)$ .

Per  $x = x_i$  ( $i = 1, \dots, k - 1$ )

$$q(x_i) + \frac{x_i - x_0}{x_k - x_0}(r(x_i) - q(x_i)) = f_i + \frac{x_i - x_0}{x_k - x_0}(f_i - f_i) = f_i$$

Per  $x = x_k$

$$q(x_k) + \frac{x_k - x_0}{x_k - x_0} (r(x_k) - q(x_k)) = r(x_k) = f_k$$

Segue che il coefficiente di  $x^k$  in  $p$  è :

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Quello che volevamo dimostrare.

Questa proprietà viene usata per ricavare ricorsivamente le differenze divise, in alternativa all'inversione della matrice  $N$ . Si procede secondo lo schema seguente:

$$\begin{array}{cccc}
 f_0 & & & \\
 f_1 & f[x_0, x_1] & & \\
 f_2 & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 f_n & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \dots \quad f[x_0, \dots, x_n]
 \end{array}$$

La matrice può essere costruita per colonne. Gli elementi diagonali sono i coefficienti del polinomio interpolante di Newton.

Nel caso in cui la funzione  $f(x)$  sia derivabile nei nodi, allora le differenze divise sono definite anche se due argomenti coincidono. Infatti si ha, ad esempio:

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Il precedente risultato si può generalizzare arrivando alla conclusione che Se la funzione  $f(x)$  è derivabile  $n$  volte in un punto  $x$ , allora:

$$f[\underbrace{x, x, \dots, x}_{n+1}] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

Se la funzione  $f$  è derivabile  $m$  volte con derivata  $m.ma$  continua, allora esiste un punto  $\xi$  appartenente al più piccolo segmento contenente i punti  $x_0, x_1, \dots, x_m$  tale che:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

## Esempio

Calcoliamo la tabella delle differenze divise relativa alla funzione  $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$  nei punti  $x_i = i - 2$ , per  $i = 0, 1, \dots, 4$ .

-2	-3			
-1	-5	-2		
0	-3	2	2	
1	3	6	2	0
2	13	10	2	0

Si ha che  $\forall i \ f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = 2$   
mentre  $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = 0$ .

Le diagonali della tabella rappresentano i coefficienti delle seguenti diverse espressioni (in quanto utilizzano nodi diversi) del polinomio  $f(x)$ , ottenute mediante la base di Newton:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \\
&= f[-2] + f[-2, -1](x + 2) + f[-2, -1, 0](x + 2)(x + 1) \\
&= -3 - 2(x + 2) + 2(x + 2)(x + 1) \\
&= f[-1] + f[-1, 0](x + 1) + f[-1, 0, 1](x + 1)(x - 0) \\
&= -5 + 2(x + 1) + 2x(x + 1) \\
&= f[0] + f[0, 1](x - 0) + f[0, 1, 2](x - 0)(x + 1) \\
&= -3 + 6x + 2x(x - 1).
\end{aligned}$$



## Esempio

Calcoliamo la  $\sqrt{11} = 3.3166$  utilizzando un polinomio di grado 2 ed uno di grado 4. Per ottenere i 2 polinomi occorrono rispettivamente 3 e 5 punti. Consideriamo i nodi  $x_0 = 9$ ,  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 16$ ,  $x_3 = 1$  e  $x_4 = 25$  di cui è nota la radice quadrata. Per calcolare i coefficienti di entrambi i polinomi è sufficiente costruire la seguente tabella della funzione  $\sqrt{x}$ :

9	3				
4	2	1/5			
16	4	1/6	-1/210		
1	1	1/5	-1/90	1/1260	
25	5	1/6	-1/270	1/2835	-1/36288

da cui risulta:

$$p_2(x) = 3 + \frac{1}{5}(x - 9) - \frac{1}{210}(x - 4)(x - 9),$$
$$p_4(x) = p_2(x) + \left(\frac{1}{1260} - \frac{1}{36288}(x - 1)\right)(x - 16)(x - 4)(x - 9).$$

Le approssimazioni ottenute sono:  $p_2(11) = 3.333$  e  $p_4(11) = 3.297$ .

# Interpolazione di Hermite

L'interpolazione di Hermite cerca di costruire un polinomio Interpolante tale che: dati  $(x_0, f_0, f'_0), (x_1, f_1, f'_1), \dots, (x_n, f_n, f'_n)$  verifichi le seguenti condizioni di Interpolazione:

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, n \quad p'(x_i) = f'_i \quad i = 0, n$$

## Teorema

*Dati  $n + 1$  nodi  $x_i, 0 \leq i \leq n$  e  $2 * n + 2$  valori,  $f_i$  e  $f'_i, 0 \leq i \leq n$  se i nodi sono distinti allora esiste un unico polinomio di grado minore o uguale a  $2n + 1$  tale che:*

$$p(x_i) = f_i, \quad p'(x_i) = f'_i$$

## Esempio: Costruzione del polinomio di Hermite usando la base di Newton

Consideriamo i nodi  $x_0$  e  $x_1$  e i valori  $f_0, f'_0, f_1, f'_1$ . Costruiamo la tabella delle differenze divise con nodi coincidenti

$$\begin{array}{l|l} x_0 & f_0 \\ x_0 & f_0 \quad f[x_0, x_0] = f'_0 \\ x_1 & f_1 \quad f[x_0, x_1] \quad f[x_0, x_0, x_1] \\ x_1 & f_1 \quad f[x_1, x_1] = f'_1 \quad f[x_0, x_1, x_1] \quad f[x_0, x_0, x_1, x_1] \end{array}$$

Il polinomio di Hermite di terzo grado è:

$$p(x) = f_0 + f'_0(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1)$$

## Errore nella interpolazione

Finora abbiamo trattato le ordinate  $f_i$  come numeri arbitrari. Possiamo cambiare il punto di vista e assumere che  $f_i = f(x_i)$ , con  $f$  una funzione sufficientemente regolare.

Sia  $p$  il polinomio interpolante la  $f$  nei nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Cerchiamo un'espressione per l'errore

$$e(t) = f(t) - p(t)$$

con  $t$  diverso dai nodi.

Sia  $q(u)$  il polinomio di grado  $n + 1$  che interpola i nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e  $x_{n+1} = t$ . La forma di Newton per  $q(u)$  è:

$$q(u) = \sum_{i=0}^{n+1} f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (u - x_j)$$

$$q(u) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (u - x_j) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (u - x_j)$$

Quindi

$$q(u) = p(u) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t]\omega(u)$$

con

$$\omega(u) = \prod_{j=0}^n (u - x_j)$$

Per costruzione  $q(t) = f(t)$ , quindi:

$$f(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t]\omega(t)$$

o

$$e(t) = f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, t]\omega(t)$$

Consideriamo adesso la funzione

$$r(u) = f(u) - p(u) - f[x_0, x_1, \dots, x_n, t]\omega(u)$$

con  $t$  fissato e  $u$  variabile. Poichè  $p(x_i) = f(x_i)$  e  $\omega(x_i) = 0$

$$r(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - f[x_0, x_1, \dots, x_n, t]\omega(x_i) = 0$$

inoltre

$$r(t) = f(t) - p(t) - f[x_0, x_1, \dots, x_n, t]\omega(t) = 0$$

Se  $I$  è il più piccolo intervallo contenente  $x_0, x_1, \dots, x_n, t$  allora  $r(u)$  ha almeno  $n + 2$  zeri in  $I$ . Per il Teorema di Rolle, fra ognuno di questi zeri vi è uno zero di  $r'(u)$ .  $r'(u)$  ha almeno  $n + 1$  zeri in  $I$  e  $r''(u)$  ha almeno  $n$  zeri in  $I$ . Continuando troviamo che  $r^{(n+1)}(u)$  ha almeno 1 zero in  $I$ .

Sia  $\xi$  un zero di  $r^{(n+1)}(u)$  in  $I$ . Allora poichè  $p(u)$  è un polinomio di grado  $n$ ,  $p^{(n+1)}(u) = 0$ , inoltre  $\omega^{(n+1)}(u) = (n+1)!$ , quindi

$$0 = r^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - f[x_0, \dots, x_n, t](n+1)!$$

o

$$f[x_0, \dots, x_n, t] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Quindi se  $p$  è il polinomio interpolante le  $f$  nei nodi  $x_0, \dots, x_n$

$$e(x) = f(x) - p(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Mentre il secondo termine dipende dalla funzione  $f$  e dalla sua regolarità, il primo termine dipende esclusivamente dalla scelta dei punti in cui si esegue l'interpolazione. Supponiamo che i punti siano tutti contenuti nell'intervallo  $[a, b]$ . Non è restrittivo supporre che  $[a, b]$  sia  $[-1, 1]$ . In caso contrario possiamo usare la trasformazione  $t = \frac{2x-b-a}{b-a}$ . Poniamo ora:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{-1 < x < 1} |f(x)|.$$

$\|\cdot\|_{\infty}$  è una norma e quindi soddisfa alle proprietà già viste per le norme di vettori, cioè:

N1)  $\|f\|_{\infty} = 0$  se e solo se  $f(x) = 0$ ,

N2)  $\|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \|f\|_{\infty}$ ,

N3)  $\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$ .



Si ha

$$\|e\|_{\infty} \leq \|\omega\|_{\infty} \|f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\|_{\infty}.$$

Si può dimostrare che esiste una scelta dei punti di interpolazione che minimizza la norma  $\|\omega\|_{\infty}$ . Tale scelta richiede di prendere i seguenti nodi in  $[-1, 1]$ :

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

o in  $[a, b]$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Questi nodi sono detti nodi di Chebyshev. Quando i nodi da scegliere non sono fissati a priori, conviene prendere questi ultimi. Nell'esempio seguente la stessa funzione è interpolata su nodi equidistanti e su quelli di Chebyshev. Il polinomio interpolante con nodi equidistanti presenti oscillazioni molto più ampie, specialmente vicino agli estremi dell'intervallo, rispetto al polinomio ottenuto con i nodi di Chebyshev.

Esaminiamo la reazione del polinomio di interpolazione  $p(x)$  alla presenza di perturbazioni nelle ordinate  $f_j$ . Siano  $f_j + \delta_j$  i valori perturbati e definiamo

$$\hat{p}(x) = p(x) + \delta p(x) = \sum_{j=0}^n (f_j + \delta_j) L_j(x)$$

L'errore soddisfa

$$\hat{p}(x) - p(x) = \delta p(x) = \sum_{j=0}^n (\delta_j) L_j(x)$$

e

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq \left( \sum_{j=0}^n |L_j(x)| \right) \max_{0 \leq j \leq n} |\delta_j|.$$

Definite  $\lambda(x) = \sum_{j=0}^n |L_j(x)|$  la funzione di Lebesgue e  $\Lambda_n = \|\lambda(x)\|_\infty$  la costante di Lebesgue, si ha

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq \lambda(x) \max_{0 \leq j \leq n} |\delta_j|$$

e

$$\|\hat{p}(x) - p(x)\|_\infty \leq \Lambda_n \|\delta\|_\infty$$

con  $\delta = (\delta_0, \dots, \delta_n)^T$ .

Dividendo per  $\|p(x)\|_\infty \geq \|\mathbf{f}\|_\infty$  si ha

$$\frac{\|\hat{p}(x) - p(x)\|_\infty}{\|p(x)\|_\infty} \leq \Lambda_n \frac{\|\delta\|_\infty}{\|\mathbf{f}\|_\infty}$$

con  $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)^T$ .

La costante di Lebesgue associata ai nodi  $x_0, \dots, x_n$  e all'intervallo  $[a, b]$  rappresenta una maggiorazione del coefficiente di amplificazione degli errori nei dati sul risultato  $p(x)$ .

# Spline

L'interpolazione polinomiale presenta degli aspetti negativi quando i nodi sono molti. I polinomi, essendo di grado elevato, presentano delle forti oscillazioni tra un nodo e l'altro. Supponiamo che i nodi  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  siano contenuti in un intervallo  $[a, b]$ . Sia  $d \geq 1$ . Definiamo *funzione spline* di ordine  $d$  una funzione  $S_d(x)$  tale che:

- 1  $S_d(x)$  è un polinomio di grado  $d$  in ogni intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- 2  $S_d^{(k)}(x)$ , per  $k = 0, 1, \dots, d - 1$  è continua in  $[a, b]$ .

La derivata  $S_d'$  è una funzione spline di ordine  $d - 1$  e l'integrale è una funzione spline di ordine  $d + 1$ .

## Spline lineare

Se costruiamo la spline interpolante  $S_1(x)$  date le coppie  $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ , in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ , la spline è definita da

$$S_1(x) = \frac{(x_{i+1} - x)f_i + (x - x_i)f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$$

quando  $f_i = f(x_i)$  con  $f$  continua con derivata prima e seconda continua, dalla formula per l'errore dell'interpolazione

$$\|S_1(x) - f(x)\|_\infty \leq \|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_\infty \frac{\|f''(x)\|_\infty}{2}$$

quindi se  $h = \max_i(x_{i+1} - x_i)$  si ha

$$\|S_1(x) - f(x)\|_\infty \leq O(h^2)$$