

# Equazioni non lineari

Corso di Calcolo Numerico, a.a. 2009/2010

Francesca Mazzia

Dipartimento di Matematica  
Università di Bari

# Problema

Data una funzione  $f$  in una variabile, continua nell'intervallo  $[a, b]$ , trovare le soluzioni del problema

$$f(x) = 0$$

Denotiamo la soluzione del problema, e la chiamiamo zero della funzione con  $\alpha$ .

## Teorema di Bolzano

Se  $f(x) \in C([a, b])$  ed  $f(a)f(b) < 0$ , esiste almeno uno zero reale  $\alpha$  contenuto nell'intervallo  $[a, b]$ .

I metodi che studieremo sono metodi iterativi, si parte da una approssimazione iniziale  $x_0$  e si costruiscono delle approssimazioni successive  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$

## Criteri di arresto

È necessario definire dei criteri di arresto che interrompano il succedersi delle iterazioni nel momento in cui è stata raggiunta una stima buona dello zero.

Si può arrestare il procedimento quando

$$|x_{n+1} - x_n| < atol$$

e/o

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|} < rtol$$

e/o

$$|f(x_n)| < ftol$$

con  $atol, rtol, ftol$  tolleranze specificate dall'utente. Poichè non conosciamo il valore di  $\alpha$ , è preferibile usare il seguente criterio misto

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 + |x_n|} < rtol$$

# Proprietà richieste ad un algoritmo

- efficiente: poche valutazioni di funzioni;
- robusto: fallisce di rado e quando non funziona avvisa l'utente;
- richiede pochi dati addizionali;
- richiede che la funzioni soddisfi le minime proprietà di regolarità;
- si generalizza facilmente a equazioni con più variabili;

## Metodo delle successive bisezioni

Supponiamo che  $\alpha$  sia l'unico zero contenuto nell'intervallo  $[a, b]$ . Posto  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , risulta  $f(a_0)f(b_0) < 0$ ; si considera come prima stima di  $\alpha$  il punto medio dell'intervallo, ovvero

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Si calcola poi il valore che la funzione assume in tale punto:

se  $f(c_0) = 0$  abbiamo trovato la soluzione,

se  $f(c_0) \neq 0$ :

$f(a_0)f(c_0) < 0 \implies$  lo zero cade in  $[a_0, c_0[$  e si definisce come nuovo intervallo  $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$ .

$f(c_0)f(b_0) < 0 \implies$  lo zero cade in  $[c_0, b_0[$  e si considera come nuovo intervallo  $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$ .

A questo punto si analizza nuovamente il comportamento della funzione nel punto medio

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

assunto come nuova approssimazione dello zero, ed il processo si ripete. La procedura definita dal metodo delle bisezioni determina una sequenza di intervalli ciascuno dei quali è contenuto nel precedente

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \subseteq \cdots \subseteq [a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0];$$

il generico intervallo ha ampiezza pari alla metà di quella dell'intervallo precedentemente determinato e contiene lo zero  $\alpha$  di  $f(x)$ .

Generalizzando, la procedura costruisce la successione dei punti medi

$$c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad n \geq 1$$

e se  $f(c_n) \neq 0$ , definisce i nuovi intervalli nel modo seguente

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [c_n, b_{n-1}] & \text{se } f(c_n) f(b_{n-1}) < 0 \\ [a_{n-1}, c_n] & \text{se } f(a_{n-1}) f(c_n) < 0. \end{cases}$$

## Convergenza del metodo

Se la funzione è continua il metodo delle bisezioni fornisce sempre uno zero  $\alpha$  di  $f$  in  $[a, b]$ , quindi risulta essere sempre convergente. Per questo viene detto globalmente convergente.

Definiamo

$$|e_n| = |c_n - \alpha|$$

allora

$$|e_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

e l'errore viene dimezzato ad ogni iterata.

Il numero di iterate richiesto per avere l'errore assoluto minore di  $atol$  è

$$n \geq \text{round}\left(\log_2\left(\frac{b - a}{2 \cdot atol}\right)\right)$$

## Metodi iterativi

Un metodo iterativo genera, a partire da un punto iniziale  $x_0$ , una successione di punti  $x_n$  definita da

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

la funzione  $\phi$  è detta funzione iteratrice ed è continua. Se questo procedimento converge verso un punto  $\alpha$  allora deve essere  $\alpha = \phi(\alpha)$ . Infatti:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n)$$

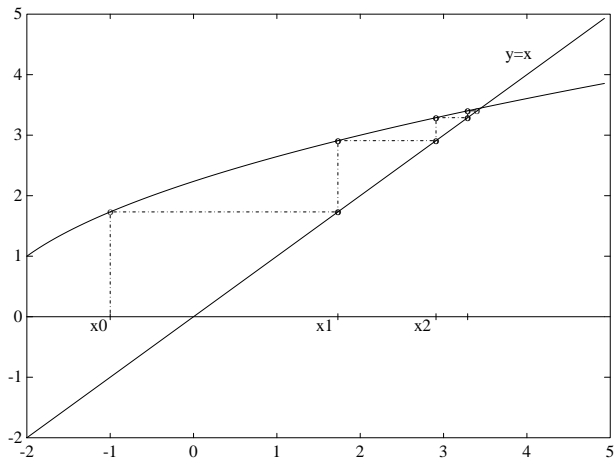
e per la continuità della funzione  $\phi$ :

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \phi(\alpha).$$

Se siamo interessati a cercare uno zero  $\alpha$  della equazione  $f(x) = 0$ , nella costruzione della funzione iteratrice  $\phi(x)$  dobbiamo fare in modo che  $\alpha = \phi(\alpha)$ , in tal caso  $\alpha$  è detto punto fisso di  $\phi$ .



# Interpretazione grafica



$$x_{n+1} = \phi(x_n) \equiv (2x_n + 5)^{1/3}$$

## Interpretazione grafica

Si disegna in un piano cartesiano la bisettrice del primo e terzo quadrante e la curva  $y = \phi(x)$ .

Partendo dal punto iniziale  $x_0$  sull'asse orizzontale, si traccia la verticale fino ad incontrare la curva.

Da questo punto si traccia la parallela all'asse  $x$  fino ad incontrare la bisettrice.

L'ascissa del punto di intersezione è il nuovo punto  $x_1$ .

Ripetendo la costruzione si ottengono gli altri punti.

Se l'equazione da risolvere è non lineare, allora i procedimenti iterativi possono diventare indispensabili, sia perché i metodi diretti possono essere costosi, sia perché, molto spesso, i metodi diretti non esistono. Il seguente teorema descrive una condizione sulla funzione iteratrice  $\phi$  che garantisce la convergenza locale della successione.

Per poter usare questo teorema è necessaria una conoscenza approssimata sulla localizzazione dello zero.

## Teorema di contrazione o del punto fisso

Sia  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  un procedimento iterativo tale che  $\alpha = \phi(\alpha)$  e con  $\phi(x)$  derivabile e con derivata prima continua in un intorno  $I_0$  di  $\alpha$ . Se  $|\phi'(\alpha)| < \lambda < 1$ , partendo da un opportuno intorno di  $\alpha$ , il procedimento converge ad  $\alpha$ .

### Dim.

Per la continuità di  $\phi'(x)$  in  $I_0$ , esiste un altro intorno dello zero, contenuto in  $I_0$ , che indicheremo con  $I$ , in cui  $|\phi'(x)| < \lambda < 1$ . Supponendo che  $x_0 \in I$ , si ha

$$|x_1 - \alpha| = |\phi(x_0) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\xi)| |x_0 - \alpha|$$

con  $\xi \in I$ . Essendo  $|\phi'(x)| < \lambda < 1$ , si ha che  $x_1 \in I$ .

Allo stesso modo si dimostra che tutti i successivi punti sono in  $I$ .

Inoltre:  $|x_n - \alpha| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(\alpha)| < \lambda |x_{n-1} - \alpha| < \dots < \lambda^n |x_0 - \alpha|$  e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - \alpha| = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n |x_0 - \alpha| = 0.$$

## Esempio

Calcoliamo la radice positiva di  $f(x) \equiv x^3 - 2x - 5$ .

Poichè  $f(1.5) < 0$ , ed  $f(2.5) > 0$ , la radice deve trovarsi nell'intervallo  $(1.5, 2.5)$ . La funzione iteratrice più immediata è  $\phi(x) = 0.5 * (x^3 - 5)$ , che definisce il procedimento iterativo:

$$x_{n+1} = 0.5 * (x_n^3 - 5),$$

nell'intervallo  $(1.5, 2.5)$  è sempre  $|\phi'(x)| > 1$  e quindi non è soddisfatta l'ipotesi del teorema precedente.

La funzione iteratrice  $\phi(x) = (2x_n + 5)^{1/3}$ , che definisce il procedimento iterativo:

$$x_{n+1} = (2x_n + 5)^{1/3},$$

invece soddisfa l'ipotesi del teorema essendo, nell'intervallo considerato,  $1/6 < \phi'(x) < 0.15$ . Il procedimento è quindi convergente.

## Velocità di convergenza

Dopo aver trovato uno o più procedimenti iterativi convergenti, è necessario ancora distinguere tra questi in base ad altri criteri.

Il principale di tali criteri è la rapidità con cui la successione delle iterate converge.

Il parametro che effettua questa distinzione è l'ordine di convergenza.

Definiamo  $e_n = x_n - \alpha$  l'errore al passo  $n$ -simo.

Sia  $x_0, x_1, \dots$ , la successione ottenuta mediante il metodo iterativo

$$x_n = \phi(x_{n-1}).$$

Essa converge con ordine  $p \geq 1$  se esiste  $c > 0$  tale che definitivamente

$$|e_{n+1}| \leq c|e_n|^p.$$

Nel caso  $p = 1$  la convergenza si dice lineare; in tal caso  $c$  deve essere strettamente minore di 1.

Se  $p = 2$  la convergenza si dice quadratica.

Se la funzione  $\phi$  è sufficientemente regolare in un intorno del punto fisso  $\alpha$ , l'ordine di convergenza  $p$  è legato al valore delle derivate successive della  $\phi$ .

### Teorema.

Sia  $\phi(x)$  derivabile  $p$  volte in un intorno di  $\alpha$  con derivata  $p$ -esima continua. Allora la successione generata da  $\phi$  ha ordine di convergenza  $p$  se e solo se risulta

$$\phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \dots = \phi^{(p-1)}(\alpha) = 0,$$

e  $\phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$ .

## Dimostrazione.

È sufficiente considerare lo sviluppo della serie di Taylor di  $\phi$  in un intorno del punto fisso  $\alpha$ , arrestato all'ordine  $p$ :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(x - \alpha) + \cdots + \\ &\frac{\phi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x - \alpha)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - \alpha)^p\end{aligned}$$

con  $\xi$  un opportuno punto tra  $x$  ed  $\alpha$ . Si ha che

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = \phi(x_n) - \phi(\alpha) = \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_n - \alpha)^p, \text{ da cui la tesi.}$$



Se  $\phi'(\alpha) \neq 0$ , la convergenza del metodo è lineare,

Se  $\phi'(\alpha) = 0$ , la convergenza è almeno quadratica o superlineare.

La convergenza è superlineare se:

$$|e_{n+1}| \leq c_n |e_n|^p.$$

con  $c_n \rightarrow 0$ .

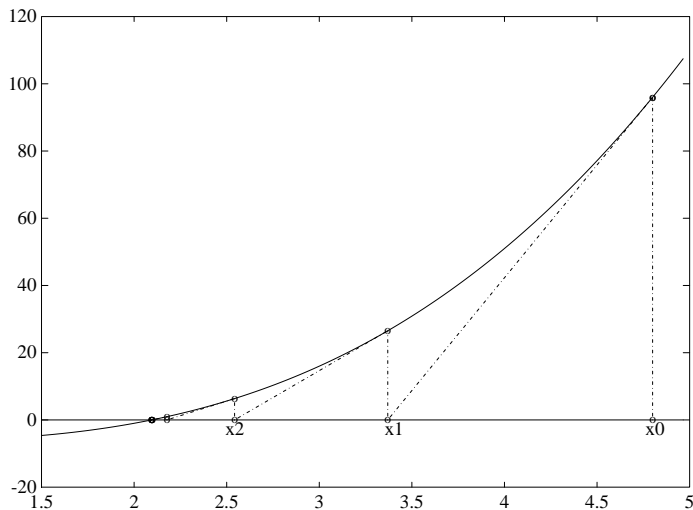
# Il Metodo di Newton

Supponiamo che la funzione  $f(x)$  abbia derivata non nulla; la funzione iteratrice  $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$  definisce il procedimento iterativo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

detto metodo di Newton.

# Interpretazione geometrica



## Metodo di Newton

## Interpretazione geometrica

Sia  $y = f(x)$  la curva definita dalla funzione di cui si vuol trovare uno zero. Gli zeri sono le intersezioni della curva con l'asse  $x$ .

Sia  $x_0$  il punto iniziale, a cui corrisponde sulla curva il punto  $(x_0, f(x_0))$ . La retta tangente alla curva passante per tale punto ha equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Essa interseca l'asse  $x$  nel punto  $x_1$  dato da:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

che è proprio il primo punto ottenuto dal metodo di Newton. Per questo motivo il metodo di Newton è anche chiamato metodo delle tangenti.

## Ordine di convergenza

Supponiamo  $f'(\alpha) \neq 0$ .

Calcoliamo la derivata prima di  $\phi(x)$ :

$$\phi'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$$

e nel punto  $\alpha$ , in cui  $f(\alpha) = 0$ ,  $\phi'(\alpha) = 0$ .

Ciò significa che in un opportuno intorno dello zero la convergenza del metodo è superlineare.

Calcoliamo la derivata seconda di  $\phi(x)$  in  $\alpha$

$$\phi''(\alpha) = f''(\alpha)/f'(\alpha)$$

Se  $f''(\alpha) \neq 0$  il metodo ha ordine 2.

Se  $f''(\alpha) = 0$  il metodo ha ordine 3.

## Criteri di stop e stime dell'errore

$$x_{n+1} - \alpha = \phi(x_n) - \phi(\alpha) = \phi'(\xi)(x_n - \alpha),$$

con  $\xi$  un punto compreso fra  $x_n$  e  $\alpha$ , si ha:

$$x_{n+1} - x_n = (\phi'(\xi) - 1)(x_n - \alpha),$$

da cui si ha:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha - x_n}{\alpha} \right| &= \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha(\phi'(\xi) - 1)} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\alpha(\phi'(\xi) - 1)} \right| |x_{n+1} - x_n| \simeq \\ &= \left| \frac{1}{(\phi'(\xi) - 1)} \right| \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\min(|x_n|, |x_{n+1}|)} \right|. \end{aligned}$$

Nell'ottenere l'ultima espressione si è tenuto conto che quando il procedimento converge, i punti  $x_n$  sono molto vicini ad  $\alpha$ .

## Criteri di stop e stime dell'errore

Se esiste  $r > 0$  tale che

$$\forall x \in ]\alpha - r, \alpha + r[ : \quad |\phi'(x)| \leq K < 1$$

allora è possibile arrestare la procedura quando

$$\frac{1}{(1 - K)} \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\min(|x_n|, |x_{n+1}|)} \right| < rtol.$$

Uno studio a priori di  $\phi'(x)$  in un intorno di  $\alpha$  non è sempre possibile, o comunque può risultare complesso. Si utilizza in tali casi la condizione più semplice:

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\min(|x_n|, |x_{n+1}|)} \right| < rtol.$$

Essa non rappresenta bene l'errore relativo quando  $\phi'(x)$  è vicino ad uno nell'intorno dello zero. Per i metodi superlineari (come il metodo di Newton) va invece molto bene.

## Criteri di stop e stime dell'errore

Un altro criterio è quello di arrestare il procedimento quando:

$$|f(x_n)| < \epsilon.$$

Essendo  $f(x_n) = f'(\xi)(x_n - \alpha)$ , con  $\xi \in (\alpha, x_n)$ , si ha:

$$\left| \frac{\alpha - x_n}{\alpha} \right| = \left| \frac{f(x_n)}{\alpha f'(\xi)} \right|$$

da cui si deduce che il test è valido se  $|\alpha f'(\xi)|$  non è troppo grande o troppo piccolo.



# Metodi quasi-Newtoniani

Uno dei problemi del metodo di Newton è che richiede il calcolo della derivata prima di  $f$  a ogni iterazione.

- La derivata può essere costosa.
- La funzione  $f$  può essere data con una formula complessa, e quindi è difficile da calcolare.
- La funzione  $f$  si conosce solo come risultato di un lungo calcolo numerico e una formula per la derivata non è disponibile.

Un modo per risolvere questo problema è considerare il seguente procedimento iterativo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g_n}$$

con  $g_n$  una approssimazione di  $f'(x_n)$ . Questi metodi vengono chiamati quasi-newtoniani.

# Metodo delle secanti

La derivata è approssimata dal rapporto incrementale

$$g_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

## Metodo della direzione costante

$g_n$  è costante e il procedimento iterativo diventa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g} = \phi(x_n)$$

Se calcoliamo  $\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{g}$  vediamo che il procedimento iterativo é convergente se  $|\phi'(\alpha)| = |1 - \frac{f'(\alpha)}{g}| < 1$  e il metodo converge linearmente.

## Il metodo delle secanti

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

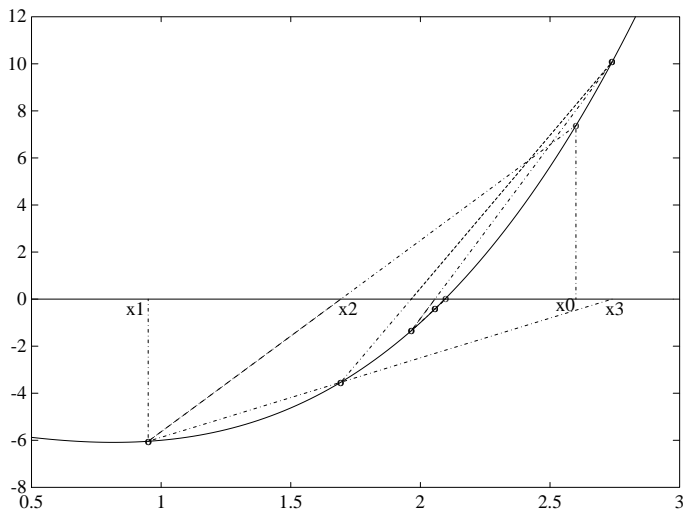
Questo procedimento iterativo non rientra nella classe dei procedimenti  $x_{n+1} = \phi(x_n)$ , ma il nuovo punto dipende da due punti precedenti, cioè:

$$x_{n+1} = \phi(x_{n-1}, x_n).$$

e necessita, per poter partire, di due punti iniziali.

## Interpretazione geometrica

Il nuovo punto è l'ascissa del punto di intersezione con l'asse  $x$  della retta secante passante per i punti  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  e  $(x_n, f(x_n))$ .



# Convergenza del metodo delle secanti

Il metodo delle secanti è superlineare nel caso in cui la funzione  $f$  abbia derivata seconda continua nell'intorno dello zero.

Si può dimostrare che in questo caso l'ordine è  $p = 1.618$ .

È un po' meno veloce del metodo di Newton ma ha il vantaggio che ad ogni passo calcola solo  $f(x_n)$ .

## Regula falsi

L'idea del metodo delle secanti può essere usata per ottenere un procedimento iterativo ad un punto. Basta tenere fisso uno dei due punti, per esempio  $x_0$ .

Si ottiene quindi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n).$$

Questo metodo, detto *regula falsi* è lineare e quindi meno veloce del metodo delle secanti.

## Caso di zeri multipli

Finora abbiamo supposto che  $f'(\alpha)$  sia non nulla in  $\alpha$ . Se ciò non accade significa che lo zero è almeno doppio. Uno zero è multiplo di molteplicità  $q$  per la funzione  $f(x)$  se essa può mettersi nella forma

$$f(x) = (x - \alpha)^q g(x), \text{ con } g(\alpha) \neq 0.$$

In tal caso in  $\alpha$  si annullano tutte le derivate di  $f(x)$  fino all'ordine  $q - 1$ , mentre  $f^{(q)}(x) \neq 0$ . Vale anche il viceversa.



## Metodo di Newton per zeri multipli

Nel caso in cui  $\alpha$  abbia molteplicità maggiore di 1, l'ordine del metodo di Newton si abbassa e la convergenza diventa lineare. Infatti:

$$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{q}.$$

Se si conosce a priori la molteplicità  $q$ , allora il procedimento iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - q \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ha ordine di convergenza 2.

# Algoritmi ibridi

Esistono procedimenti iterativi ad uno o più punti con ordine di convergenza più elevato. Quelli che abbiamo riportato sono i più importanti ed i più comunemente usati.

D'altra parte non esiste, per una generica funzione  $f(x)$ , il metodo iterativo ideale che sia veloce con convergenza garantita quando si parte da un punto iniziale generico.

Possiamo cercare di sfruttare la convergenza globale del metodo delle bisezioni combinandola con la velocità del metodo delle secanti. Le idee di base sono riunite in un unico algoritmo (noto come algoritmo di Brent)

# Algoritmo di Brent

Una semplificazione dell'algoritmo di Brent è la seguente.

Data una funzione  $f$  e un intervallo  $[a; b]$  con  $f(a)f(b) < 0$ , e quindi contenente una radice, iniziamo effettuando una iterazione del metodo delle secanti, usando gli estremi dell'intervallo come punti iniziali. Continuiamo l'iterazione con il metodo delle secanti fino a quando le iterate sono contenute nell'intervallo.

Contemporaneamente aggiorniamo l'intervallo sfruttando le iterate successivamente calcolate e scegliendo sempre l'intervallo più piccolo in cui la funzione cambia di segno.

Se l'iterata non cade nell'intervallo eseguiamo un passo del metodo delle bisezioni, in modo da avvicinarsi alla radice e riprovare con il metodo delle secanti.

La successione  $x_k$  viene aggiornata in modo da considerare sempre le approssimazioni più accurate della radice.

# Algoritmo di Brent

Un possibile algoritmo è il seguente:

Dato un intervallo iniziale  $[a; b] = [a_1; b_1]$ , con  $f(a_1)f(b_1) < 0$ , poni  $k = 1$ ,  $x_0 = a_1$ ,  $x_1 = b_1$  esegui:

- 1 calcola  $c = x_k - f(x_k)(x_k - x_{k-1})/(f(x_k) - f(x_{k-1}))$
- 2 Se  $c < a_k$  o  $c > b_k$  allora esegui il metodo delle bisezioni calcola  $c = a_k + (b_k - a_k)/2$  Se  $f(a_k)f(c) < 0$ , allora  $a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = c; x_{k+1} = c; x_k = a_k$  Se  $f(c)f(b_k) < 0$  allora  $a_{k+1} = c; b_{k+1} = b_k; x_{k+1} = c; x_k = b_k$
- 3 altrimenti aggiorna l'intervallo usando il passo delle secanti  
Se  $f(a_k)f(c) < 0$ , allora  $a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = c; x_{k+1} = c$  Se  $f(c)f(b_k) < 0$  allora  $a_{k+1} = c; b_{k+1} = b_k; x_{k+1} = c$
- 4  $k = k + 1$ , vai al passo 1.

# Esperimenti

Eseguiamo adesso alcune function per trovare lo zero di una funzione. La function `bzero` implementa il metodo delle bisezioni, la function `nzero` il metodo di Newton, e la function `bszero` il metodo ibrido appena descritto. Tutte le function tranne la `nzero` accettano come dati di input: la funzione, l'intervallo  $[a; b]$  che contiene lo zero e una variabile strutturata con dei dati opzionali.

La function `nzero` ha come dati di input: la funzione, la derivata prima, il punto iniziale della successione  $x_0$  e una variabile strutturata con dei dati opzionali. I dati di output sono: la soluzione  $x$ ,  $f(x)$ , un flag che informa sul risultato (se è maggiore di zero la soluzione è stata trovata correttamente, altrimenti si è verificato un errore), una struttura contenente alcune informazioni di output, come il numero di valutazioni di funzioni, il numero di iterate e l'algoritmo utilizzato.

## Errore, accuratezza e numero di condizione

Quando cerchiamo di valutare la funzione  $f$  nel punto  $x$  il valore non sarà esatto, ma otteniamo un valore perturbato

$$\tilde{f}(x) = f(x) + e(x)$$

L'errore  $e(x)$  può essere generato da diverse fonti. Può derivare dagli errori di arrotondamento, o dall'approssimazione fatta per valutare la funzione, per esempio se la funzione è definita da un integrale che viene approssimato numericamente.

Dato  $\alpha$  uno zero di  $f$  e supponiamo di conoscere un limite superiore sull'errore  $|e(x)| < \epsilon$ , se  $x_1$  è un punto con  $f(x_1) > \epsilon$  allora

$$\tilde{f}(x_1) = f(x_1) + e(x_1) \geq f(x_1) - \epsilon \geq 0$$

e quindi  $\tilde{f}(x_1)$  ha lo stesso segno di  $f(x_1)$ . Lo stesso accade se  $f(x_1) < -\epsilon$ . Quindi se  $|f(x)| > \epsilon$  il segno di  $f(x)$  ci da informazioni sulla localizzazione dello zero.

Sia  $[a, b]$  il più grande intervallo contenente  $\alpha$  per cui

$$x \in [a, b] \text{ implica } |f(x)| \leq \epsilon$$

Se siamo fuori da questo intervallo il valore di  $\tilde{f}(x)$  da informazioni sullo zero di  $f$ . Nell'intervallo il valore di  $\tilde{f}(x)$  non ci da informazioni, neanche sul segno della funzione.

L'intervallo  $[a, b]$  si chiama intervallo di incertezza dello zero. Gli algoritmi che calcolano una approssimazione dello zero all'interno di questo intervallo di incertezza si dicono stabili.

La grandezza dell'intervallo di incertezza varia da problema a problema. Se l'intervallo è piccolo il problema si dice ben condizionato, quindi un algoritmo stabile risolverà un problema ben condizionato accuratamente. Se l'intervallo è grande il problema si dice mal condizionato.

Per quantificare il grado di malcondizionamento calcoliamo il numero di condizione nel caso in cui  $f'(\alpha) \neq 0$ .

$$f(x) \approx f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

segue che  $|f(x)| \lesssim \epsilon$  quando  $|f'(\alpha)(x - \alpha)| \lesssim \epsilon$ , quindi

$$|x - \alpha| \lesssim \frac{\epsilon}{|f'(\alpha)|}$$

cioè

$$[a, b] \approx \left[ \alpha - \frac{\epsilon}{|f'(\alpha)|}, \alpha + \frac{\epsilon}{|f'(\alpha)|} \right].$$

quindi

$$\frac{1}{|f'(\alpha)|}$$

è il numero di condizione del problema.